

## اصلاح مدل لیانگ- راجرز برای بیان رفتار دقیق تر تغییر شکل ترمومکانیکال آلیاژهای حافظه دار نیکل-تیتانیوم

محمد رضا دیلمی<sup>۱</sup>، سید خطیب الاسلام صدرنژاد<sup>۲</sup>

قطب علمی طراحی، رباتیک و اتوماسیون

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

m\_deilami@yahoo.com

### چکیده

در این تحقیق سعی بر آن است که با به کارگیری نتایج حاصل از ترمودینامیک آماری در مدل‌های ماکروسکوپی مهندسی بیان رفتار آلیاژهای حافظه دار، دقت این مدل‌ها را بالا برد و به نتایج تجربی نزدیکتر نمود. بدین منظور، دو مسئله استحاله‌های ناقص در حلقه هیستریزس اصلی و نیز وابستگی خواص آلیاژ به فازهای تشکیل دهنده درونی آن حین تغییر شکل ماده مورد بررسی دقیقتر قرار گرفته و در نهایت مدل لیانگ که پرکاربردترین مدل مهندسی برای بیان رفتار آلیاژهای حافظه دار می باشد، اصلاح شده است. تمرکز این تحقیق بیشتر بر روی آلیاژهای نیکل-تیتانیوم می باشد.

واژه‌های کلیدی: آلیاژ حافظه دار، مدل لیانگ-راجرز، رفتار ترمومکانیکال، حلقه هیستریزس.

### مقدمه

آلیاژهای حافظه دار دسته ای خاص از مواد هستند که قابلیت بازیابی حالت قبل از تغییر شکل پلاستیک یافته خود به وسیله انجام یک عملیات حرارتی ساده و نیز نشان دادن کرنشهای بازگشت پذیر بسیار بالا در قیاس با مواد دیگر را دارا هستند. نیروی قابل تولید بالا بر واحد حجم ماده، سادگی عملکرد و تحریک، قیمت نسبی پائین، عدم ایجاد سروصدا و آلودگی و دقت مناسب باعث استفاده گسترده این آلیاژها به عنوان عملگر و سنسور در کاربردهای مختلف مهندسی شده است. از سوی دیگر، سازگاری این دسته از مواد با بافتهای درونی بدن انسان که در حد سازگاری فولادهای زنگ نزن است، توجه مهندسین پزشکی را نیز برای به کارگیری آنها در تجهیزات

بیومکانیکی به خود جلب کرده است. در عین حال، خستگی و عدم برگشت کامل در سیکلهای کاری بالا، از عمده ایرادات این دسته از مواد به عنوان عملگر یا سنسور می باشد [۱].

کرنشهای بازگشت پذیر بالا و بازیابی شکل اولیه این آلیاژها ناشی از تغییر ساختار کریستالی درونی آنها بین دو فاز آستنیت و مارتنزیت است. در حقیقت کلیه خواص منحصر به فرد این دسته از مواد از همین استحاله‌های مارتنزیتی ناشی شده که با دانستن دقیق آنها می توان رفتار آلیاژ را در بارگذاریهای ترمومکانیک شبیه سازی و پیش بینی نمود. از سوی دیگر، کاربرد دقیق و موثر یک عملگر در یک سیستم کنترلی منوط به داشتن مدلی مناسب از رفتار آن می باشد تا بتوان قبل از راه اندازی آن سیستم، با ایجاد

۱- کارشناس ارشد

۲- استاد

یک مدل کامپیوتری از آن و شبیه سازی سیستم مذکور، کارائی آنرا ارزیابی نمود. دقت این شبیه سازی و واقعی بودن نتایج آن، مستقیماً به دقت مدل اجزاء تشکیل دهنده سیستم از جمله عملگرهای آن متکی است و همین امر اهمیت شناسایی این عملگرها را دو چندان می نماید.

تا کنون مدل‌های ریاضی فراوانی برای بیان رفتار ترمومکانیکال آلیاژهای حافظه دار ارائه شده که یا بر مبنای اصول ترمودینامیک آماری و یا بر اساس مشاهدات ماکروسکوپیک تجربی و استنتاج از قوانین ترمودینامیکی استخراج شده اند. هدف کلی این مدل‌ها، پیش بینی تغییر شکل ایجاد شده در آلیاژ تحت اثر دو عامل دما و بار مکانیکی می باشد. مدل مولر و آخن باخ [۱] از معروفترین مدل‌های بر مبنای ترمودینامیک آماری و مدل‌های تاناکا [۲]، لیانگ-راجرز [۳] و برینسون [۴] نیز از پرکاربردترین مدل‌های دسته دوم می باشند که به آنها مدل‌های مهندسی نیز گفته می شود. اگر چه مدل‌های نوع اول دارای دقت و گستره پیش بینی وسیع تری از مدل‌های مهندسی هستند، وجود پارامترهایی در آنها که از لحاظ مهندسی به آسانی قابل تعیین نیستند و نیز پیچیدگی معادلات آنها باعث روی آوردن طراحان و کاربران به مدل‌های مهندسی شده است. با این حال، به کارگیری فرضیات ساده کننده در این مدل‌ها، از دقت آنها تا حدی کاسته شده و نیز دامنه شرایط قابل استفاده از آنها نیز تا اندازه ای محدود است. در این تحقیق سعی بر آن است که با به کارگیری نتایج حاصل از ترمودینامیک آماری در مدل‌های مهندسی، دقت این مدل‌ها را بالا برد. بدین منظور، استحاله های ناقص و نیز وابستگی خواص آلیاژ به فازهای درونی آن حین تغییر شکل ماده مورد بررسی دقیقتر قرار گرفته و مدل لیانگ که پرکاربردترین مدل بیان رفتار آلیاژهای حافظه دار است، اصلاح شده است.

### رفتار ترمومکانیکال آلیاژهای حافظه دار

در غیاب تنشهای مکانیکی، ساختار کریستالوگرافی آلیاژهای حافظه دار، در دماهای بالا از فاز آستنیت و در دماهای پائین از فاز خود تطبیق (self accommodate) مارتنزیت تشکیل می شود. فاز مارتنزیت از واریانتهای دوقلوئیهایی مختلفی تشکیل شده که همگی از لحاظ کریستالوگرافی یکسان ولی دارای جهت گیریهای متفاوت

هستند و در عوض فاز آستنیت به صورت تک واریانت می باشد. مبنای قابل بازیابی بودن کرنش پلاستیک در این آلیاژها، همین انتقال فاز از مارتنزیت به آستنیت و بالعکس و نیز تبدیل جهت گیری واریانتهای مختلف فاز مارتنزیت به یک جهت ترجیحی در راستای محور بار اعمال شده می باشد. پارامتر اساسی در بررسی رفتار ترمومکانیکال آلیاژهای حافظه دار، دماهای تغییر فاز هستند که آنها را با  $M_s$ ،  $M_f$ ،  $A_s$  و  $A_f$  نشان می دهند. کسر مارتنزیت موجود در آلیاژ در دماهای مختلف در شکل (۱) به نمایش درآمده است. این دماها در حالتی که هیچ تنش مکانیکی بر روی آلیاژ اعمال نشده باشد تعریف می شود و اعمال بار مکانیکی، باعث افزایش این دماها خواهد شد [۴]. با توجه به این چهار دما و نیز مفاهیم خود تطبیقی، حافظه داری را می توان بدین ترتیب به صورت اجمالی تفسیر کرد؛ فرض کنید که هم اکنون قطعه به حالت بدون تنش در دمائی کمتر از دمای  $M_f$  قرار گرفته است. می دانیم که این قطعه از واریانتهای دوقلوئیهایی مختلف مارتنزیتی تشکیل شده است که همگی از لحاظ کریستالوگرافی یکسان ولی دارای جهتگیریهای مختلف می باشند. زمانیکه آلیاژ تحت بار کششی قرار می گیرد، این دوقلوئیهای از هم باز (detwin) می شوند و همگی به جهت گیری ترجیحی مطابق با بار در می آیند [۴]. البته این در صورتی است که مقدار بار به یک حد بحرانی برسد (در مدل ارائه شده توسط مولر که بر مبنای روشهای آماری می باشد، چاههای پتانسیل تعریف می شوند که شرط تغییر فاز آلیاژ، خارج شدن از این چاههای پتانسیلی یا به تعبیری دیگر عبور از این سدهای پتانسیل می باشد [۵]). جهت ترجیحی کریستالها با هم راستا شدن اندیس صفحه رابط آنها با محور بار تعیین می شود. در حین تغییر جهت صفحات رابط، کرنش ایجاد شده در قطعه با شدت محسوس تری نسبت به تنش اعمال شده زیاد می شود و بدین ترتیب نمودار تنش-کرنش شماتیک نمایش داده شده در شکل (۲) ایجاد خواهد شد. با توجه به این نکته که از لحاظ ترمودینامیکی، حالت تک کریستاله در دمای  $T < M_f$  پایدار است، پس از اینکه بار از روی قطعه برداشته شد، جهتگیری عوض نخواهد شد و در نتیجه کرنش پسماند نسبتاً زیادی در قطعه باقی خواهد ماند. (اندکی از کرنش به صورت الاستیک بازیابی می شود، لیکن سهم عمده کرنش به صورت پسماند باقی خواهد

ماده (که در اینجا یک بعدی و در جهت طولی آلیاژ که همان جهت اعمال نیروی کششی هم است، در نظر گرفته می شود) و چگالی ماده می باشند. تاناکا بر این اعتقاد است که ترمودینامیک ماده را می توان تنها با دانستن سه پارامتر  $(\varepsilon, T, \zeta)$  به طور کامل تحلیل نمود. همانگونه که می دانیم در این تعریف  $\zeta$  کسر فاز مارتنزیت (صرف نظر از اینکه از چه واریانته باشد. زیرا در استخراج این رابطه فرض بر این بود که فقط یک واریانته مارتنزیت موجود است) و  $\varepsilon$  کرنش گرین می باشد. با تعریف انرژی آزاد هولمز توسط رابطه (۲) داریم:

$$\Phi = u - Ts \quad (2)$$

حال با جایگذاری این انرژی آزاد هولمز در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\left( \sigma - \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} - \left( s + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \dot{\zeta} - \frac{1}{\rho_0 T} \frac{\rho_0}{\rho} q_{sur} F^{-1} \frac{\partial T}{\partial x} \geq 0 \quad (3)$$

که در این رابطه  $F$  گرادیان تغییر شکل و  $\sigma$  تنش دوم پیولا-کریشهف می باشد. حال شرط کافی برای برقراری این رابطه به ازاء تمامی مقادیر  $\dot{\varepsilon}$  و  $\dot{T}$  این است که:

$$\sigma - \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = 0 \Rightarrow \quad (4)$$

$$\sigma = \rho_0 \frac{\partial \Phi(\varepsilon, T, \zeta)}{\partial \varepsilon} = \sigma(\varepsilon, T, \zeta)$$

و به همین ترتیب:

$$s + \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0 \Rightarrow \quad (5)$$

$$s = - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, T, \zeta)}{\partial T} = -s(\varepsilon, T, \zeta)$$

رابطه (۴) به عنوان معادله ساختاری مکانیکی ساده برای بیان رفتار ترمومکانیکال آلیاژهای حافظه دار استفاده می شود. در حقیقت این مدل، مدلی است که تاناکا برای بیان این رفتار آلیاژ معرفی کرد. همین مدل ساده خود مبنای بسیاری از مدل‌های پیشنهادی دیگر از جمله مدل لیانگ-راجرز شد. در واقع لیانگ با استفاده از همین رابطه مدل خود را برای آلیاژهای یک طرفه به صورت زیر ارائه کرد [۳]:

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT \quad (6)$$

که می توان آنرا به شکل ساده تر رابطه زیر نیز بیان کرد:

ماند). حال با یک گرمایش ساده و رساندن دمای قطعه به  $T > A_f$ ، این مارتنزیت‌های باز شده به فاز آستنیت و پس از خنک شدن مجدداً به حالت اولیه دوقلوئی برمی گردند و کرنش پسماند به طور کامل بازیابی می شود [۴]. این فرآیندها به طور شماتیک در شکل (۳) به تصویر کشیده شده است. به همین ترتیب خاصیت فوق الاستیک نیز توجیه می شود. در اینجا به این نکته اشاره می کنیم که اگر چه در دماهای بالا فاز آستنیت به عنوان فاز پایدار شناخته می شود، لیکن اگر تنش مکانیکی اعمال شده بر آلیاژ از یک حد بحرانی بیشتر شود، آلیاژ به فاز مارتنزیت در می آید. (در حقیقت نمودار پتانسیل در مدل مولر دچار اعوجاج می شود و در نتیجه چاهها و به دنبال آن سدهای پتانسیل از بین می روند [۵]) این مارتنزیت به وجود آمده نیز دارای جهت گیری ترجیحی می باشد. در حین باربرداری در صورتیکه در دمای  $T > A_f$  باشد، این فاز نیز به حال ناپایدار در می آید و دوباره به آستنیت مبدل خواهد شد. بدین ترتیب ماده کاملاً به شکل الاستیک اولیه باز می گردد و هیچ تغییر شکل دائمی در آن باقی نخواهد ماند. البته این در حالتی است که حتماً در دمایی بالاتر از  $T > A_f$  قرار گرفته باشیم. در صورتی که  $A_s < T < A_f$  باشد، تمامی کرنش پلاستیک بازیابی نخواهد شد و به این رفتار آلیاژ، رفتار نیمه فوق الاستیک می گویند.

## استخراج معادلات ساختاری

در ابتدا فرض کنید که یک قطعه از آلیاژ حافظه دار داریم که بارگذاری و شکل هندسی قطعه، شرایطی یک بعدی را به وجود می آورد و در این آلیاژ استحاله فازی رخ می دهد. طبق اصول ترمودینامیکی در این حالت بایستی تعادل حرارتی (انرژی) و نیز نابرابری کلازیوس-دوهم همزمان برقرار باشد. یعنی اینکه:

$$\rho \dot{u} - \dot{\sigma} L + \frac{\partial q_{sur}}{\partial x} - \rho q = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{s} - \rho \frac{q}{L} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_{sur}}{T} \right) \geq 0$$

در روابط فوق  $u$ ،  $\dot{\sigma}$ ،  $q$  و  $q_{sur}$  به ترتیب انرژی داخلی مخصوص، تنش کوشی، ترم حرارت تولید شده و شار حرارتی القا شده به آلیاژ می باشند و نیز  $x$ ،  $T$ ،  $s$  و  $\rho$  به ترتیب معرف آنتروپی مخصوص، دما، جهت مختصات

مدلهای ارائه شده دیگر را می توان نتایج بسیار نزدیک حاصل از آن با یافته های تجربی دانست؛ حال آنکه پارامترهای حاکم بر این مدل همگی با استفاده از روشهای استاندارد مهندسی، قابل اندازه گیری هستند و بدین ترتیب استفاده کاربردی از آن در مصارف صنعتی کاملاً عملی است. در این مدل در حالتی که استحاله مارتنزیتی باشیم، خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{1-\zeta_0}{2} \cos[a_M(T-M_f - \frac{\sigma}{C_M})] + \frac{1+\zeta_0}{2} \quad (11)$$

البته به شرط اینکه تنش در محدوده  $C_M(T-M_s) < \sigma < C_M(T-M_f)$  قرار داشته باشد. در استحاله معکوس از مارتنزیت به آستنیت نیز خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{2} \{\cos[a_A(T-A_s - \frac{\sigma}{C_A})] + 1\} \quad (12)$$

که با شرط  $C_A(T-A_f) < \sigma < C_A(T-A_s)$  برقرار می باشد. در این روابط  $\zeta_0$  کسر مارتنزیت در ابتدای استحاله جاری،  $\sigma$  تنش اعمال شده در اثر بار مکانیکی و  $T$  دمای آلیاژ می باشد. در این دو رابطه (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f}, \quad a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad (13)$$

### اصلاح مدل لیانگ-راجرز

حال به بررسی ایرادات وارده به این مدل می پردازیم. در ابتدا فرض کنید که استحاله به صورت ناقص صورت گیرد؛ یعنی اینکه قبل از اینکه تمام آلیاژ از فاز آستنیت به فاز مارتنزیت در آید، بار از روی آلیاژ برداشته شود و یا اینکه در این لحظه دمای آلیاژ بالا رود. در شکل (۴) یک سیم نمونه با خواص برگرفته از مرجع [۳] را در دمای ثابت و در حالت فوق الاستیک تحت دو نوع بار قرار داده ایم و منحنی تنش-کرنش آن را در دو حالت استحاله کامل و ناقص ترسیم کرده ایم. طبق روابط ترمودینامیکی حاکم بر آلیاژهای حافظه دار، نقطه شروع استحاله عکس در حالت ناقص بایستی بر روی قطر منحنی هیستریزس قرار گیرد [۱]. در حالیکه مدل لیانگ این نکته را در بر نمی گیرد. در حقیقت، تنش های بحرانی استحاله نه تنها به دما بستگی دارد بلکه به کسر مارتنزیت در بارگذاری قبلی نیز بستگی دارند. این مسئله را می توان به راحتی با یک تناسب بندی حل نمود. برای این کار، جهت سادگی ابتدا تنش های بحرانی را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \zeta) \Rightarrow d\sigma = D(\varepsilon, T, \zeta)d\varepsilon + \Omega(\varepsilon, T, \zeta)d\zeta + \Theta(\varepsilon, T, \zeta)dT \quad (7)$$

که در آن  $D$ ،  $\Omega$  و  $\Theta$  پارامترهایی مربوط به جنس ماده و خواص آن می باشند. این مقادیر وابسته به ماده را ثابت فرض کنیم، با یک انتگرال گیری ساده خواهیم داشت:

$$\sigma - \sigma_0 = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\zeta - \zeta_0) + \Theta(T - T_0) \quad (8)$$

شرط ساده کننده فوق باعث بروز بعضی از محدودیتها در رابطه (۸) می شود. به عنوان مثال، طبق آزمونهای تجربی بدست آمده بیشترین کرنش پسماند آلیاژ  $\varepsilon_L$  مقداری ثابت می باشد که با تبدیل کلیه مارتنزیتها باز شده به وجود آمده در ماده به آستنیت، قابل بازیابی است. از طرف دیگر تا زمانی که به دمای  $A_s$  نرسیم، در حالت بی باری این کرنش پسماند ماکسیمم در ماده باقی می ماند. حال با فرض اینکه تمامی شرایط اولیه صفر و در انتها  $\zeta = 1$ ،  $\varepsilon = \varepsilon_L$ ،  $\sigma = 0$  و  $T = T_0$  (با شرط اینکه  $M_s < T < A_s$ ) در این صورت از رابطه ساختاری (۸)، رابطه قیدی زیر استنتاج خواهد شد:

$$\Omega = -D\varepsilon_L \quad (9)$$

### سینتیک استحاله

در ابتدا دقت می کنیم که با استفاده از اصول حاکم بر آلیاژهای تک کریستاله، می توان یک فرم خاص از معادله کلایوس - کلاپیرن را به فرم زیر نوشت [۴]:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\Delta H}{T_0\varepsilon} \quad (10)$$

در این رابطه،  $\varepsilon$  برابر با کرنش استحاله و  $\Delta H$  اختلاف آنتالپی فازهای مارتنزیت و آستنیت در دمای  $T_0$  است که در آن هر دو فاز، تحت تنش  $\sigma$  به حال تعادل درآمده اند. بدین ترتیب می توان ارتباط بین دما و تنش استحاله را به وسیله رابطه (۱۰) بیان کرد. حال با دانستن سینتیک استحاله می توان مقدار کسر مارتنزیت (های) موجود در آلیاژ را در هر شرایطی بدست آورد. لیانگ در مدل خود با استفاده از این رابطه، مدلی کسینوسی که تابعی از دما و تنش است و مقدار کسر مارتنزیت را حین استحاله تعیین می کند، ارائه داد. مهمترین مزیت این مدل نسبت به

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_M(T - M_s) \\ \sigma_2 &= C_M(T - M_f) \\ \sigma_3 &= C_A(T - A_s) \\ \sigma_4 &= C_A(T - A_f) \end{aligned} \quad (14)$$

است. با تعریف مدول الاستیسیته جدید، جهت برقراری شرط سازگاری، تنسور استحالته نیز مستلزم تغییر است:

$$D = D_0 + (\zeta - \zeta_0) \frac{\partial D}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta_0} \quad (19)$$

$$\Omega = \Omega_0 + (\zeta - \zeta_0) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta_0}$$

برای یافتن این مقدار جدید، با نوشتن بسط تیلور حول نقطه اولیه داریم:

در صورتیکه فرض کنیم خواص آلیاژ مستقل از کسر

$$\zeta_0 = 0, \quad \varepsilon_0 = 0 \quad (20)$$

$$\zeta = 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_L$$

مارتنزیت باشد، با بررسی شکل (۲) خواهیم داشت: (فرض کنید که استحالته مستقیم کامل انجام شود)

$$0 = D_0 \varepsilon_L + \Omega_0 \rightarrow \Omega_0 = -D_0 \varepsilon_L \quad (21)$$

حال از معادله (۸) که در یک فرآیند دما ثابت نوشته شده باشد، داریم:

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta_0} = - \left( \frac{\partial D_0}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta_0} \right) \varepsilon_L = - \varepsilon_L \frac{D - D_0}{\zeta - \zeta_0} \quad (22)$$

پس با مشتق گیری از این رابطه و ترکیب آن با رابطه (۱۹) خواهیم داشت:

$$\Omega(\zeta) = -\varepsilon_L D(\zeta) = -\varepsilon_L \{D_a + (D_m - D_a)\zeta\} \quad (23)$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده از روابط (۲۱) و (۲۲) رابطه (۱۹) داریم:

حال نوبت به حل معادله اساسی (۷) با داشتن ضرایب

$$\int d\sigma = \int \{D_a + (D_m - D_a)\zeta\} (d\varepsilon - \varepsilon_L d\zeta) + \int \Theta_T dT \quad (24)$$

جدید می رسد. با قرار دادن مدول الاستیسیته و تنسور

$$\sigma = D_a \varepsilon + \zeta (D_m - D_a) \varepsilon + f(\zeta) - \varepsilon_L D_a \zeta - \varepsilon_L (D_m - D_a) \frac{\zeta^2}{2} + \Theta_T T + C \quad (25)$$

استحالته جدید در این رابطه و انتگرال گیری از آن داریم:

با حل این انتگرال خواهیم داشت:

که با بازنویسی آن خواهیم داشت:

$$D = D_a + (D_m - D_a)\zeta \quad (18)$$

در این روابط،  $C$  یک عدد ثابت است که از شرایط اولیه

بدست می آید و  $f(\zeta)$  نیز یک تابع عمومی از  $\zeta$  است. با

قرار دادن شرایط اولیه با اندیس صفر خواهیم داشت:

حال پارامترهای واسط زیر را نیز تعریف می نمایم:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_2}{D}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_4}{D} + \varepsilon_L$$

$$P = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (15)$$

$$Q = \sigma_1 - P \varepsilon_1$$

$$R = \sigma_0 - D \varepsilon_0$$

که در این پارامترها، اندیس صفر به معنی مقدار کمیت در انتهای آخرین بارگذاری (در ابتدای استحالته عکس) می باشد. حال تنشهای بحرانی جدید را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sigma'_3 = \frac{P(Q - R)}{D - P} + Q \quad (16)$$

$$\sigma'_4 = \zeta_0 \sigma_4 + (1 - \zeta_0) \sigma_1$$

در این صورت، شرط داشتن استحالته معکوس قرار گرفتن مقدار تنش در بازه بحرانی جدید می باشد. علاوه بر این، رابطه سینتیک استحالته (۱۱) نیز به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{2} \{ \cos[\pi \frac{\sigma - \sigma'_3}{\sigma'_4 - \sigma'_3}] + 1 \} \quad (17)$$

$$\sigma'_3 < \sigma < \sigma'_4$$

بایستی به این نکته توجه کرد که در روابط جدید، دما خود را در تنشهای بحرانی نشان داده و بدین ترتیب نقش خود را در استحالته ایفا می کند. در شکل (۵)، دوباره بارگذاری به روی همان سیم انجام شده و نتیجه به تصویر کشیده شده است. قرار گرفتن نقاط شروع استحالته عکس بر روی قطر منحنی هیستریزس کاملاً مشهود است. به روش مشابه استحالته های معکوس ناقص را نیز می توان اصلاح کرد.

حال به بررسی مسئله تغییر خواص آلیاژ حین استحالته می پردازیم. مطالعات نشان می دهد که مدول الاستیسیته آلیاژ به شدت به تغییرات کسر مارتنزیت حساس است [۴]. به

$$\sigma = D\varepsilon + \Omega\zeta + \Theta_T T + \varepsilon_L (D_m - D_a) \frac{\zeta^2}{2} + f(\zeta) + C \quad (26)$$

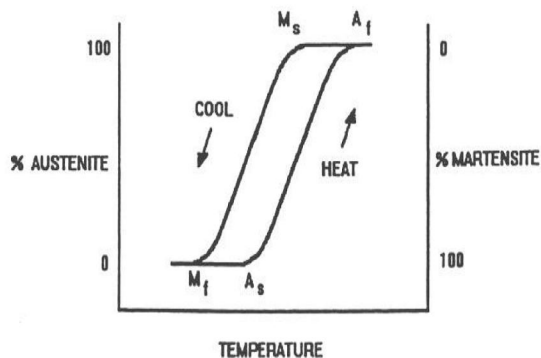
صورت یک تقریب خطی، می توان این مدول را به صورت زیر نوشت:

که در این رابطه،  $D_a$  و  $D_m$  به ترتیب برابر مدول الاستیسیته در حالتی تمام آستنیت و تمام مارتنزیت آلیاژ

ترمو مکانیکال یک بعدی این دسته از مواد و به طور خاص مدل مهندسی لیانگ راجرز را بررسی کردیم و در انتها به اصلاح این مدل پرداختیم. دو عامل وابستگی مدول الاستیسیته به کسر مارتنزیت موجود در آلیاژ و نیز مسئله استحاله های ناقص در مدل گنجانیده شد.

### مراجع

- 1- Muller I., Seelecke S., "Thermodynamic Aspects of shape memory alloys". Mathematical and computer modeling, Vol. 34, 2001, pp.1307-1355.
- 2- Tanaka K., "A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-Dimensional Tensile Behavior". Research Mechanics, Vol. 18, 1986, PP. 251-263.
- 3- Liang C., Rogers C. A. "One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials". Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 8, April 1997, PP. 285-302.
- 4- Brinson L. C., "One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable". Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 4, April 1993, PP. 229-242.
- 5- Muller I., Seelecke S., "Shape memory alloy actuators in smart structures: Modeling and simulation". Appl Mech Rev, Vol. 57, No. 1, 2004, PP. 23-46.
- 6- Ikuta K., "Micro/Miniature Shape Memory Alloy Actuator", IEEE J. Rob. Autom., 3, 1990, pp. 2156-2161



$$C = \sigma_0 - \{D_0 \varepsilon_0 + \Omega_0 \zeta_0 + \Theta_T T_0 + \quad (27)$$

$$\varepsilon_L (D_m - D_a) \frac{\zeta_0^2}{2} + f(\zeta_0)\}$$

برای تعیین این تابع، دوباره به شکل (۲) مراجعه می کنیم. همانگونه که قبلا هم بدان اشاره شد، مقدار کرنش قابل بازیابی در یک آلیاژ حافظه دار مقداری ثابت است که آنرا  $\varepsilon_L$  نامیدیم. کرنش پسماند در شکل (۲) همواره مقداری کمتر یا برابر با این کرنش است. حالت برابر به زمانی بر می گردد که استحاله در آلیاژ کامل شده باشد. با یک تقریب می توان این دو فاکتور را از طریق رابطه (۲۸) به هم مرتبط کرد:

$$\varepsilon_{res} = \zeta \varepsilon_L \quad (28)$$

اگر در شکل (۲) فرآیندی با شرایط اولیه تمام آستنیت و بدون کرنش اولیه، در یک دمای ثابت به اندازه ای بارگذاری شود که در آن استحاله ناقص رخ دهد و سپس کاملا بار از آن برداشته شود:

$$0 = D(\varepsilon_L \zeta) + \varepsilon_L (D_m - D_a) \frac{\zeta^2}{2} \quad (29)$$

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) - \varepsilon_L D \zeta$$

در نهایت، از روابط (۲۶)، (۲۸)، و (۲۹) خواهیم داشت:

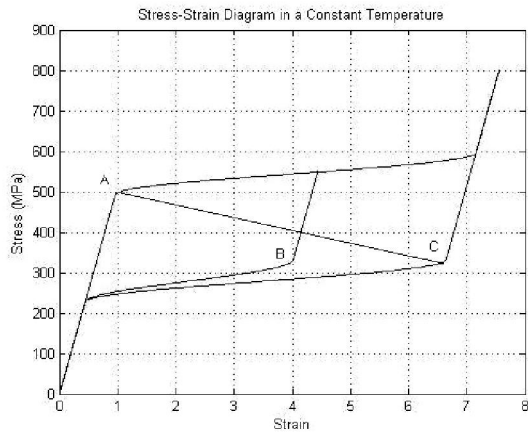
$$\sigma - \sigma_0 = D \varepsilon - D_0 \varepsilon_0 + \Omega \zeta - \Omega_0 \zeta_0 + \Theta_T (T - T_0) \quad (30)$$

این معادله به عنوان ساختاری اصلاح شده قابل استفاده است. ذکر این نکته قابل اهمیت است که کلیه پارامترهای دیگر آلیاژهای حافظه دار نظیر مقاومت الکتریکی مخصوص، ضریب انتقال حرارت رسانشی و سایر موارد دیگر را می توان به طریق مشابه به کسر مارتنزیت موجود در آلیاژ مرتبط کرد [۶].

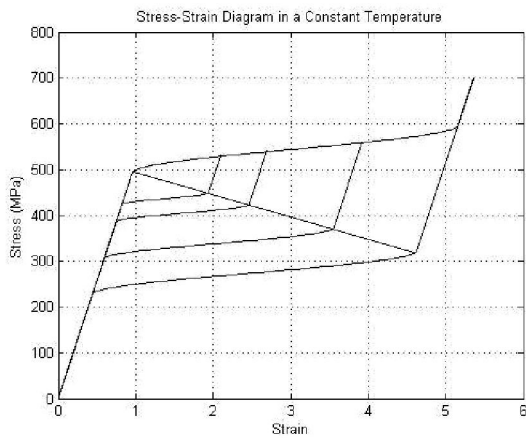
در شکل (۶) نمودار تنش-کرنش برای همان آلیاژ نمونه با انجام تصحیح ترسیم شده است. ذکر این نکته لازم است که در اینجا هم با تعریف تنشهای بحرانی جدید (دقیقا همانند حالت قبل)، نقاط شروع و خاتمه استحاله های ناقص تصحیح می شوند.

### نتیجه گیری

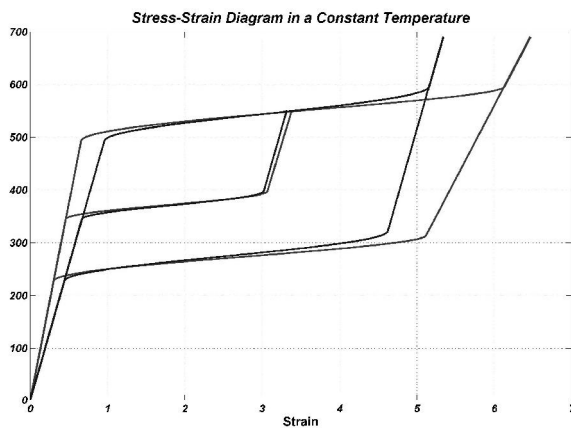
در این مقاله در ابتدا به معرفی آلیاژهای حافظه دار و ذکر برخی از کاربردهای آن پرداختیم. در ادامه مدلاسیون



شکل ۴- نمودار تنش کرنش آلیاژ حافظه دار با استفاده از مدل لیانگ-راجرز.

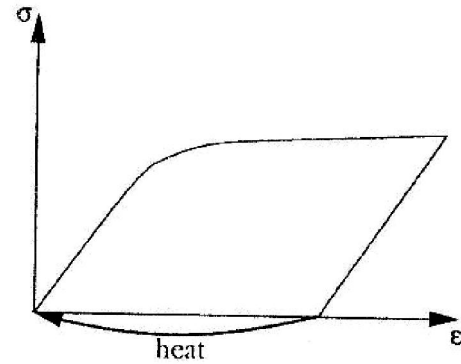


شکل ۵- اصلاح حلقه های هیستریزیس داخلی ناشی از استحاله های مارتنزیتی ناقص.

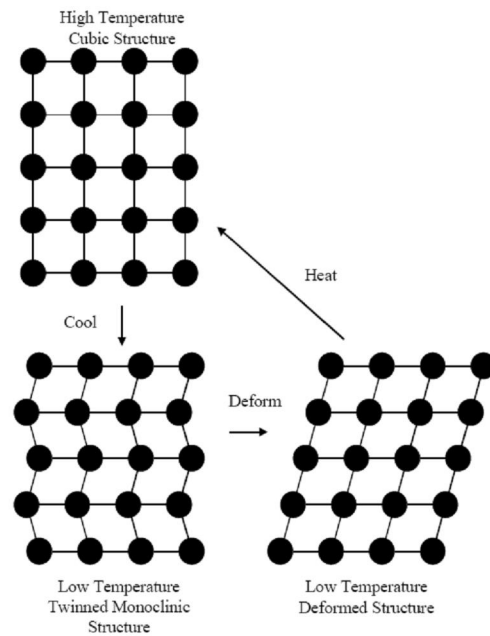


شکل ۶- نمودار تنش کرنش آلیاژ حافظه دار با استفاده از مدل اصلاح شده نهایی و مقایسه آن با حالت خواص ثابت.

شکل ۱- کسر مارتنزیت موجود بر حسب دما.



شکل ۲- نمودار تنش کرنش در دمای کمتر از  $A_s$ .



شکل ۳- شماتیکی از ساختار کریستالی آلیاژ حافظه دار چین یک فرآیند بازیابی شکل اولیه.