انتقال حرارت در سیستمهای ساکن(بی حرکت)

تاریخچه توزیع دما:

$$T = f(t, x, y, z)$$

توزیع دما:

$$T = f(x, y, z)$$

توجه لازم است $T = f(x, y, z)$ را بدانیم تا بتوانیم شار حرارت یعنی $\frac{q}{A}$ را حساب کنیم.

- معادلات هدایت:

- اصل بقای ا نرژی در جهت x

$$\left(q_x - q_{x+\Delta x}\right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x = -\frac{\partial}{\partial x}(-k\frac{\partial T}{\partial x}\Delta y \Delta z)\Delta x$$

- اصل بقای انرژی در جهتy

$$\left(q_y - q_{y+\Delta y}\right) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}\Delta z.\Delta x)\Delta y$$

- اصل بقای انرژی در جهت z

$$\left(q_z - q_{z+\Delta z}\right) = -\frac{\partial q_z}{\partial z}\Delta z = \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}\Delta x \Delta y)\Delta z$$

نرخ ذخیره انرژی = نرخ انرژی خروجی – نرخ انرژی ورودی

نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + W_i = \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t}$$

W_i: سرعت تولید حرارت در واحد حجم در واحد زمان

در بعضی از قطعات چشمه حرارت وجود دارد و گرما تولید می شود. به طوری که:

$W_i > 0$: اگر چشمه حرارت داشته باشیم.

در بعضی قطعات چاه حرارت وجود دارد و حرارت را می بلعد و در نتیجه:

$W_i < 0$: اگرچاه حرارت داشته باشیم.

برای k ثابت، معادله فوق ساده می شود به:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{W_i}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla^2 T + \frac{W_i}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{W_i}{\rho . c}$$

$$\alpha \equiv \frac{k}{\rho . c}$$

اگر منبع حرارتی نداشته باشیم، یعنی: $W_i = 0$

$$\boxed{\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

در شرایط ثبات (steady state) :

$$\boxed{\nabla^2 T = 0}$$

جمع بندی

قانون دوم فوریه در مختصات عمود بر هم:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + W_i = \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t}}$$

تمرین ۱ قانون دوم فوریه را در مختصات استوانه ای بدست آورید.

جواب:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}\right]+\frac{W_i}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

تمرین ۲ قانون دوم فوریه را در مختصات کروی بدست آورید.

جواب:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right]+\frac{W_i}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط حدی

تمرین ۳ شرط حدی را برای هریک از موارد زیر مشخص کنید.

الف دمای مرز مشخص باشد.

ب انتهای قطعه عایق شده باشد.

ج حرارت از طریق هدایت از خارج وارد قطعه شود.

د حرارت از طریق جابجایی وارد قطعه شود.

جواب

الف: $x=L\,,\ T=T_L$

ب: $q=0\Rightarrow x=L,\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L=0$

ج: $x=L,\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L=-\frac{1}{k}\left(\frac{q}{L}\right)_L$

د: $x=L,\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L=-\frac{h}{k}\left(T_L-T_f\right)$

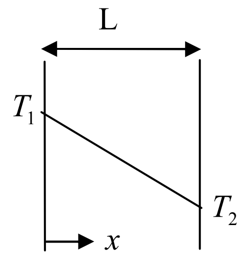
تمرین ۴ توزیع دما را در یک دیوار تخت با طول وعرض نا محدود پس از رسیدن به حالت ثبات

بدست آورید.

حل

در صورتی که ضخا مت دیوار خیلی کم باشد، می توا ن فرض کرد طول و عـرض نامحـدود اسـت. حسن اینکه دیوار را دارای طول و عرض نامحدود در نظر بگیـریم ایـن اسـت کـه مـی تـوان انتقـال حرارت را در یک جهت فرض کرد. یعنی قانون دوم فوریه را به شـرط ثابـت بـودن ضـریب انتقـال حرارت، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



۱ – معادله هدایت

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

۲ – در حا لت ثبات

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

۳ – شرایط حدی

$$x = 0,\ T = T_1$$
$$x = L,\ T = T_2$$

۴ – ا نتگرال

$$T = C_1 x + C_2$$

۵ – با قرار دادن شرایط مرزی، پاسخ به دست می آید:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

تمرین ۵ شار حرارت در حا لت ثبات در دیوار تمرین قبل چقدر است

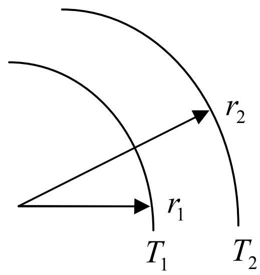
حل

$$\frac{q}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{L}\left(T_1 - T_2\right)$$

پس دبی حرارت برابر است با:

$$q = \frac{kA}{L}\left(T_1 - T_2\right)$$

تمرین ۶ توزیع دما در یک دیوار استوانه ای با طول نا محدود در حا لت ثبات چگونه است؟



حل

۱ - معادله هدایت

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

۲ - حالت ثبات

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

۳ - شرایط حدی

$$r=r_1,\ T=T_1$$
$$r=r_2,\ T=T_2$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=C_1$$

۴ – انتگرال

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{C_1}{r}\Rightarrow dT=C_1\frac{dr}{r}$$
$$T=C_1\ln r+C_2$$

۵ – پس از قرار دادن شرایط حدی

$$T=\frac{T_1-T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln\frac{r}{r_2}=T_2$$

تمرین ۷ شار و دبی هدایت در دیوار استوانه ای با طول نا محدود تمرین ۶ را حساب کنید.

حل

۱ – شار هدایت حرارت از معادله فوریه قابل تعیین است:

$$\frac{q}{A}=-k\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{k\,\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{r_1}{r_2}}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(T_1-T_2\right)=\frac{k}{r\ln\frac{r_2}{r_2}}\left(T_1-T_2\right)$$

۲ –اگر A مساحت سطح جانبی استوانه ($A=2\pi rL$) باشد، دبی حرارت چنین خواهد بود:

$$q^{\cdot}=2\pi rL\,\frac{q}{A}=\frac{2\pi Lk}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(T_1-T_2\right)$$

توجه شار حرارت بستگی به فاصله شعاعی دارد.

تمرین ۸ توزیع دما در دیوار کروی در حا لت ثبات هدایت حرارت چگونه ا ست؟

حل

T_2 : دمای سطح بیرونی

r_2 : شعاع سطح بیرونی

T_1 : دمای سطح درونی

r_1 : شعاع سطح درونی

r : فاصله شعاعی از مرکز

۱ – معادله هدایت

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

۲ – انتگرال

$$r^2\frac{\partial T}{\partial r}=C_1 \Rightarrow dT=C_1\frac{dr}{r^2} \Rightarrow T=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

۳ – تعیین ثابت های انتگرال

$$\bullet\, T_1=-\frac{C_1}{r_1}+C_2$$

$$\bullet\, T_2=-\frac{C_1}{r_2}+C_2$$

۴ - از دو معادله فوق خوا هیم دا شت:

$$T_1-T_2=-C_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow C_1=\frac{T_1-T_2}{-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}$$

۵ - رابطه C_2 نیز به دست می آید:

$$C_2=T_1+\frac{T_1-T_2}{r_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)}=$$

۶ - پس توزیع دما به صورت معادله زیر خواهد بود:

$$T=\frac{T_1-T_2}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\frac{1}{r}+\frac{r_1T_1-r_2T_2}{r_1-r_2}$$

تمرین ۹ شار و دبی هدایت گرما را در کره محاسبه کنید.

حل

۱ – شار:

$$\frac{q}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = +k\frac{C_1}{r^2} = \frac{k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r^2}$$

۲ – مساحت سطح جانبی کره A در این حا لت برابر است با $A = 4\pi \cdot r^2$؛ بنابراین برای دبی داریم:

$$q = 4\pi . r^2 \frac{k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi . k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

توجه در دیوار کروی در حالت ثبات، شار بستگی به فاصله شعاعی دارد؛ ولی دبی به فاصله شعاعی بستگی ندارد.

تشابه انتقال حرارت با انتقال الکتریسیته

بین حرکت گرما و بار الکتریکی تشابه وجود دارد. شدت جریان الکتریسیته برای مثال مانند دبی حرارت با هدایت الکتریکی (معکوس مقاومت الکتریکی) متناسب است:

$$I = \lambda_{elec.}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_{elec.}}$$

$$R_{elec.} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{I}$$

R_{elec} : مقاومت الکتریکی

I : شدت جریان الکتریکی

ε : ولتاژ

$$R_{ther} = \frac{T_1 - T_2}{q} \Rightarrow q = \frac{T_1 - T_2}{R_{ther}}$$

R_{ther} : مقاومت حرارتی

q : دبی حرارت

T : دما

مقاومت را می‌توان نسبت اختلاف پتانسیل (نیروی محرکه رانش) به دبی (سرعت تحول) تعریف کرد. از معادله های رسانایی $q_x = -kA\dfrac{dT}{dX} = \dfrac{kA}{L}\left(T_1 - T_2\right)$ و جابجایی $q = hA(T_s - T_\infty)$ می توان مقاومت گرمایی را به دست آورد.

مقاومت حرارتی:

۱. هدایت در دیوار تخت: $R_{th} = \dfrac{L}{kA}$

۲. هدایت در دیوار استوانه ای: $R_{th} = \dfrac{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi.Lk}$

۳. هدایت در دیواره کروی : $R_{th} = \dfrac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}{4\pi.k}$

۴. جابجایی: $R_{th} = \dfrac{1}{Ah}$

مسا حت دیواره: A

ضخا مت دیواره: L

ضریب هدایت حرارتی: k

ضریب انتقال حرارت: h

شعاع استوانه یا کره: r

دیوارچند لایه

ممکن است دیوارها از لایه های مختلف مانند آجر، گچ و ... درست شده باشد. در این صورت از طریق جمع و تفریق فرمولها خوا هیم داشت:

$$T_i - T_o = q\left(R_i + R_a + R_b + R_c + R_d + R_o\right)$$

۱ - برای دیوار تخت:

$$q = \frac{T_i - T_o}{\dfrac{1}{Ah_i} + \dfrac{L_a}{Ak_a} + \dfrac{L_b}{Ak_b} + \dfrac{L_c}{Ak_c} + \dfrac{L_d}{Ak_d} + \dfrac{1}{Ah_o}}$$

۲ - برای دیوار استوانه ای:

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{2\pi L.r_1 h_i} + \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi L\cdot k_a} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi Lk_b} + \frac{\ln\frac{r_4}{r_3}}{2\pi Lk_c} + \frac{\ln\frac{r_5}{r_4}}{2\pi Lk_d} + \frac{1}{2\pi Lr_5 h_o}}$$

ضریب کلی انتقال حرارت

ضریب کلی انتقال حرارت برای دیوار چند لایه را می توان از تعریف کلی زیر به دست آورد:

$q = AU(T_i - T_o)$

۱- ضریب کلی انتقال حرارت برای دیوار تخت:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{L_a}{k_a} + \frac{L_b}{k_b} + \frac{L_c}{k_c} + \frac{L_d}{k_d} + \frac{1}{h_o}}$$

۲- ضریب کلی انتقال حرارت برای دیوار استوانه ای:

$$\boxed{AU = \frac{1}{\frac{1}{2\pi Lr_1 h_i} + \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi Lk_a} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi Lk_b} + \frac{\ln\frac{r_4}{r_3}}{2\pi Lk_c} + \frac{\ln\frac{r_5}{r_4}}{2\pi Lk_d} + \frac{1}{2\pi Lr_5 h_o}}}$$

توجه ضریب کلی U به r وابسته است.

تمرین ۱۰ ثابت کنید U_1 در شعاع r_1 برای دیوار استوانه ای بقرار زیر است:

پاسخ

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_1}{k_a}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_b}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_c}\ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{k_d}\ln\frac{r_5}{r_4} + \frac{r_1}{r_5 h_o}}$$

سوال وجود پوسته یا قشر ناخا لصی بین لایه های دیوار، چه تغییراتی در معادلات فوق به وجـود می‌آورد؟

جواب

در سیستمهای مرکب ممکن است افت دما در سطح تماس لایه ها قابل توجه باشد؛ ولی تا کنون از این اثر چشم پوشی شده است. این تغییر دما ناشی از **مقاومت گرمایی سطح** تماس به علت چسبندگی ضعیف یا وجود پوسته است:

$$R_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q_x}$$

وجود مقاومت در سطح تماس می تواند در اثر زبری سطوح مشترک نیز باشد. در این صورت بین نقاط تماس شکافهایی پر از هوا پدید می آید که می تواند مکانیزم انتقال حرارت را از هدایت به جابجایی و تابش تغییر دهد. رسانایی از محل تماس واقعی سطوح در این شرایط بازهم میسر است. ولی انتقال گرما از شکاف ها به روش همرفتی و تابش صورت می گیرد.

در این صورت مقاومت کلی ناشی از مجموعه مقاومت های ناشی از نقاط تماس، همرفتی و تابش در شکافها است که همزمان با هم اتفاق می افتند و تعیین مجموع آنها از طریق محاسبه جمع مقاومت های موازی امکان پذیر است. از آنجا که مساحت سطح تماس سطوح زبر معمولاً″ کوچک است، در هنگام محاسبه مقاومت کل، سهم اصلی مربوط به مواضع شکافها است که بسته به محدوده دما باید در نظر گرفته شود.